姓名

准考证号

考试号

D005·00023(通卡)

绝密★启用前

2017年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工本)　试卷

(课程代码　00023)

(不允许使用计算器)

本试卷分为两部分,满分100分,考试时间150分钟。

第一部分为选择题,1页至2页,共2页。应考者必须按试题顺序在“答题卡”上按要求填涂,答在试卷上无效。

第二部分为非选择题,3页至4页,共2页。应考者必须按试题顺序在“答题卡”上作答,答在试卷上无效。

第一部分　选择题(共15分)

一、单项选择题(本大题共5小题,每小题3分,共15分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的,请将其选出并将“答题卡”的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 在空间直角坐标系中,点(1,2,6)关于z轴的对称点的坐标是

A. $(-1,-2,6)$　　B. $(-1,-2,-6)$

C. $(-1,2,-6)$　　D. $(1,-2,6)$

2. 极限$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 2}}\dfrac{7x}{x+2y}$

A. 等于0　　B. 等于1

C. 等于3　　D. 不存在

3. 设积分区域D是由$x=\sqrt{4-y^2}$,$y=x$及$y=0$所围成,二重积分$\iint\limits_D f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$化为极坐标下的二次积分为

A. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 f(r^2)\mathrm{d}r$　　B. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 f(r^2)r\mathrm{d}r$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} f(r^2)r\mathrm{d}r$　　D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} f(r^2)\mathrm{d}r$

4. 以$y=e^{-2x}$为特解的微分方程是

A. $y''+5y'+6y=0$　　B. $y''-5y'+6y=0$

C. $y''-y'-2y=0$　　D. $y''-4y'+4y=0$

5. 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}(x-1)^n$的收敛域是

A. $[-3,3]$　　B. $(-3,3)$

C. $[-2,4]$　　D. $(-2,4)$

第二部分　非选择题(共 85 分)

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 2 分,共 10 分)

6. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=\{4,0,3\}$,$\boldsymbol{\beta}=\{2,1,5\}$,则$(-3\boldsymbol{\alpha})\times\boldsymbol{\beta}=$__________.

7. 已知函数 $z=y^3e^x$,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=$__________.

8. 二次积分$\int_0^1 dy\int_y^1 y dx$ 的值是__________.

9. 微分方程 $xdx+ydy=0$ 的通解为__________.

10. 无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4^n}$ 的和 $S=$__________.

三、计算题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分)

11. 求直线 $L_1:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{1}$ 和直线 $L_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{0}$ 的夹角 θ.

12. 已知函数 $z=f(2xy,e^{x^2y})$,其中 f 为可微函数,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

13. 求曲线 $x=2\sin t,y=6\cos t,z=-4\sin^2 t$ 在对应于 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 的点处的法平面方程.

14. 问在空间的哪些点上,函数 $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$ 的梯度平行于 y 轴.

15. 计算二重积分$\iint\limits_D(x^2+y)dxdy$,其中积分区域 $D:x^2+y^2\leqslant 9$.

16. 计算三重积分$\iiint\limits_\Omega(x+y+|z|)dv$,其中积分区域 $\Omega:x^2+y^2\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 2$.

17. 计算对弧长的曲线积分$\int_C(x^2+y^2)^3 ds$,其中 C 是曲线 $x=\sqrt{2-y^2}$.

18. 计算对面积的曲面积分$\iint\limits_\Sigma(3-y-z)dS$,其中$\sum$ 是平面 $x+y+z-1=0$ 在第一卦限中的部分.

19. 求微分方程 $x\dfrac{dy}{dx}+2y=\dfrac{1}{x^2}$ 的通解.

20. 求微分方程 $y''+y=0$ 的通解.

21. 判断无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\cos\dfrac{2n}{3}$ 是否收敛,如果收敛,是绝对收敛还是条件收敛?

22. 已知周期为 2π 的周期函数 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}5,-\pi\leqslant x<0,\\2x,0\leqslant x<\pi,\end{cases}$

$S(x)$ 是 $f(x)$ 傅里叶级数$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 的和函数,求 $S(5\pi)$.

四、综合题(本大题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分)

23. 将数 a^2 分为三个正数之和,使得它们的乘积最大.

24. 验证$(5x^4+3xy^2-y^3)dx+(3x^2y-3xy^2+y^2)dy$ 在整个 Oxy 平面内是某一个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分,并求这样的一个 $u(x,y)$.

25. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-2x}$ 展开为$(x+1)$ 的幂级数.

2017年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工本)试题答案及评分参考

（课程代码 00023）

一、单项选择题(本大题共5小题,每小题3分,共15分)

1. A　　2. C　　3. B　　4. A　　5. D

二、填空题(本大题共5小题,每小题2分,共10分)

6. $\{9,42,-12\}$　　7. $3y^2e^x$　　8. $\frac{1}{6}$　　9. $x^2+y^2=C$　　10. $\frac{1}{3}$

三、计算题(本大题共12小题,每小题5分,共60分)

11. 解:∵ $s_1=\{-1,0,1\}, s_2=\{1,1,0\}$ (2分)

∴ $\cos\theta=\frac{|s_1\cdot s_2|}{|s_1|\cdot|s_2|}=\frac{1}{2}$

从而 $\theta=\frac{\pi}{3}$ (3分)

12. 解:$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\cdot 2y+f'_2\cdot e^{x^2y}\cdot 2xy=2yf'_1+2xye^{x^2y}f'_2$ (3分)

$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_1\cdot 2x+f'_2\cdot e^{x^2y}\cdot x^2=2xf'_1+x^2e^{x^2y}f'_2$ (2分)

13. 解:∵ $x'|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}, y'|_{t=\frac{\pi}{4}}=-3\sqrt{2}, z'|_{t=\frac{\pi}{4}}=-4$ (2分)

∴ 曲线在对应于 $t=\frac{\pi}{4}$ 的点处的法平面的法向量为 $(\sqrt{2},-3\sqrt{2},-4)$,又曲线对应于 $t=\frac{\pi}{4}$ 的点为 $(\sqrt{2},3\sqrt{2},-2)$,从而所求法平面方程为

$$\sqrt{2}(x-\sqrt{2})-3\sqrt{2}(y-3\sqrt{2})-4(z+2)=0$$

即为 $\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y-4z+8=0$. (3分)

14. 解:$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3yz, \frac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3xz, \frac{\partial u}{\partial z}=3z^2-3xy$

则 $\mathrm{grad}\,u=\{3x^2-3yz,3y^2-3xz,3z^2-3xy\}$ (2分)

又 y 轴上单位向量为 $\{0,1,0\}$,且梯度平行于 y 轴

则 $\frac{3x^2-3yz}{0}=\frac{3y^2-3xz}{1}=\frac{3z^2-3xy}{0}$

所以 $\begin{cases}3x^2-3yz=0\\3z^2-3xy=0\end{cases}$

即在曲线 $\begin{cases}x^2=yz\\z^2=xy\end{cases}$ 上的点处,函数 u 的梯度平行于 y 轴. (3分)

15. 解:$\iint\limits_D(x^2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^3 r^2\cos^2\theta\, r\mathrm{d}r$ (3分)

$=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^3 r^3\mathrm{d}r$

$=\pi\cdot\frac{3^4}{4}$

$=\frac{81}{4}\pi$ (2分)

16. 解:∵ $\Omega: x^2+y^2\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 2$

∴ $\iiint\limits_\Omega(x+y+|z|)\mathrm{d}v$

$=\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}v$ (2分)

$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^2 z\mathrm{d}z$

$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2^2}{2}$

$=2\pi$ (3分)

17. 解:∵ 曲线 $C: x^2+y^2=2, x\geqslant 0$

∴ $\int_C(x^2+y^2)^3\mathrm{d}s$

$=\int_C 8\mathrm{d}s$ (2分)

$=8\int_C\mathrm{d}s$

$=8\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\sqrt{2}$

$=8\sqrt{2}\pi$ (3分)

18. 解：$\Sigma: z=1-x-y, D_{xy}: 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1-x$

$$\iint_{\Sigma}(3-y-z)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}(2+x)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}}(2+x)\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (2分)$$

$$=\int_0^1\sqrt{3}(2+x)\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\sqrt{3}(2+x)(1-x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{7\sqrt{3}}{6} \quad (3分)$$

19. 解：所求方程可化为：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{2}{x}y=\dfrac{1}{x^3}$

则通解为 $y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left(\int\dfrac{1}{x^3}e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right)$ (3分)

$$=x^{-2}\left(\int\frac{1}{x^3}\cdot x^2dx+C\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}(\ln x+C) \quad (2分)$$

20. 解：所给微分方程的特征方程为：$r^2+1=0$

则其根 $r_1=-i, r_2=i$. (3分)

从而所求通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. (2分)

21. 解：∵ $\left|\dfrac{1}{n^2}\cos\dfrac{2n}{3}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛

∴ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{1}{n^2}\cos\dfrac{2n}{3}\right|$ 收敛. (3分)

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\cos\dfrac{2n}{3}$ 收敛，且为绝对收敛. (2分)

22. 解：∵ $f(x)$ 以 2π 为周期且在点 $x=5\pi$ 处不连续

∴ $S(5\pi)=S(\pi)$ (2分)

$$=\frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

$$=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

$$=\frac{5+2\pi}{2}$$

$$=\frac{5}{2}+\pi \quad (3分)$$

四、综合题(本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分)

23. 解：设所求三个正数为 x,y,z，则 $x+y+z=a^2$，

令 $S=xyz$，则可设 $F(x,y,z)=xyz+\lambda(x+y+z-a^2)$ (2分)

令
$$\begin{cases}F_x=yz+\lambda=0\\ F_y=xz+\lambda=0\\ F_z=xy+\lambda=0\\ x+y+z=a^2\end{cases}$$

可解得 $x=y=z=\dfrac{a^2}{3}$.

则三个正数均为$\dfrac{a^2}{3}$ 时，它们的乘积最大. (3分)

24. 解：设 $P(x,y)=5x^4+3xy^2-y^3, Q(x,y)=3x^2y-3xy^2+y^2$

∵ $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=6xy-3y^2=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 在整个 Oxy 平面内成立. (2分)

∴ $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在整个 Oxy 平面内是某个二元函数的全微分.

且可取 $u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(5x^4+3xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(3x^2y-3xy^2+y^2)\mathrm{d}y$

$$=\int_0^x 5x^4\mathrm{d}x+\int_0^y(3x^2y-3xy^2+y^2)\mathrm{d}y$$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3 \quad (3分)$$

25. 解：$\dfrac{1}{1-2x}=\dfrac{1}{3-2(x+1)}$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}(x+1)} \quad (2分)$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}(x+1)^n \qquad \left|\frac{2}{3}(x+1)\right|<1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}}(x+1)^n \qquad -\frac{5}{2}<x<\frac{1}{2} \quad (3分)$$