

高等数学（工本）串讲笔记

温馨提示：本书共包括以下三部分：

①考点精要②核心题型③自考乐园俱乐部简介

以上资料是由自考乐园俱乐部杨尚杰为你亲情制作

第一部分 考点精要

一、空间解析几何与向量代数

（一）向量代数

1. 向量的定义

具有大小和方向的量称为向量；只有大小的量称为数量（实数）。向量可以用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示。

2. 向量的模

向量 α 的长度称为向量的模，记为 $|\alpha|$ 。模为1的向量称为单位向量；长度为零的向量称为零向量，记为 0 。对两个向量的夹角 θ ，规定 $0 \leq \theta \leq \pi$ 。

3. 基本单位向量

与 x 轴、 y 轴、 z 轴三个坐标轴同方向的单位向量分别记为 i, j, k ，称为基本单位向量。

4. 向量的方向角与方向余弦

非零向量 a 分别与 x 轴、 y 轴、 z 轴三个坐标轴正向的夹角 α, β, γ 称为 a 的方向角； $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为 a 的方向余弦。

5. 向量的坐标表示

若 α 分别在 x 轴、 y 轴、 z 轴三个坐标轴上的投影为 a, b, c , 则

$$\alpha = ai + bj + ck,$$

记为 $\alpha = \{a, b, c\}$, 并称 a, b, c 为向量 α 的坐标. 对于给定的点 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2} &= (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k \\ &= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.\end{aligned}$$

6. 向量的线性运算

给定向量 α, β 及数量 λ , 可定义向量的加法 $\alpha + \beta$ 及数量乘法 $\lambda\alpha$, 统称为向量的线性运算, 其满足运算律:

$$(1) \text{ 加法交换律 } \alpha + \beta = \beta + \alpha;$$

$$(2) \text{ 加法结合律 } (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma);$$

(3) 数量乘法结合律 $\lambda(\mu\alpha) = \mu(\lambda\alpha) = (\lambda\mu)\alpha$, 其中 λ 与 μ 是数量;

(4) 数量乘法对于数量加法的分配律

$$(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha;$$

(5) 数量乘法对于向量加法的分配律

$$\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta.$$

7. 向量的数量积

给定向量 α 与 β , 它们的数量积定义为 $\alpha \cdot \beta =$

$|\alpha| \cdot |\beta| \cos \varphi$, 其中 φ 是 α 与 β 的夹角。数量积满足下列运算律:

(1) 交换律 $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$;

(2) 结合律 $\lambda(\alpha \cdot \beta) = (\lambda\alpha) \cdot \beta = \alpha \cdot (\lambda\beta)$, 其中 λ 是数量;

(3) 分配律 $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$.

8. 向量的向量积

给定两个向量 α 和 β , 它们的向量积定义为一个向量, 记为 $\alpha \times \beta$, 满足:

(1) $|\alpha \times \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \sin \varphi$, 其中 φ 是 α 与 β 的夹角;

(2) $\alpha \times \beta$ 的方向垂直于 α 与 β 所在的平面, 并且与 α, β 符合右手法则.

向量积满足下列运算律:

(1) 反交换律 $\alpha \times \beta = -(\beta \times \alpha)$;

(2) 结合律 $\lambda(\alpha \times \beta) = (\lambda\alpha) \times \beta = \alpha \times (\lambda\beta)$, 其中 λ 是数量;

(3) 左分配律 $\gamma \times (\alpha + \beta) = \gamma \times \alpha + \gamma \times \beta$,

右分配律 $(\alpha + \beta) \times \gamma = \alpha \times \gamma + \beta \times \gamma$.

9. 向量及其坐标的有关公式

给定向量 $\alpha = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\beta = \{b_1, b_2, b_3\}$ 及数量 λ ,

则

$$(1) \lambda \alpha = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}, \alpha \pm \beta = \{a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3\},$$

(2) $\alpha \cdot \beta = |\alpha| |\beta| \cos \varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, 其中 φ 是两个向量的夹角. 于是可推知

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha| |\beta|} \\ &= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \alpha \times \beta &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

(4) α 与 β 平行的充要条件是它们对应的坐标成比例, 即 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

(5) α 与 β 垂直的充分必要条件是 $\alpha \cdot \beta = 0$, 即 $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$.

(6) 若 $\alpha = \{a_1, a_2, a_3\} \neq 0$, 则 $\alpha^0 = \frac{1}{|\alpha|} \alpha$ 称为 α 单位化向量, 它表示与 α 同方向的单位向量, 并有 $\alpha = |\alpha|$

α^0 . 此时

$$\begin{aligned}\alpha^0 &= \left\{ \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right\} \\ &= \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\},\end{aligned}$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是 α 的方向余弦.

(二) 空间中的曲面与曲线

1. 曲面与曲面方程

给定曲面 S 及三元方程 $F(x, y, z) = 0$. 如果曲面 S 上的点的坐标都满足方程, 反之, 方程的解所对应的点都在 S 上, 则称 S 为方程 $F(x, y, z) = 0$ 所表示的曲面.

两个方程 $F_1(x, y, z) = 0$ 和 $F_2(x, y, z) = 0$ 表示同一个曲面的充分必要条件是它们为同解方程.

2. 空间曲线的方程

空间中的曲线 C 可以看做两个曲面的交线, 它的一般方程为

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

空间曲线 C 也可表示为参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), (a \leq t \leq b), \\ z = z(t) \end{cases}$$

3. 旋转面方程

一条平面曲线 C 绕它所在平面的一条直线 L 旋转一周所生成的曲面称为旋转曲面(旋转面), 其中曲线 C 称为旋转曲面的母线, 直线 L 称为旋转曲面的旋转轴.

Oyz 平面上的曲线 $C: \begin{cases} f(y, z) = 0, \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转的

旋转面方程为

$$f(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0;$$

绕 y 轴旋转的旋转面方程为

$$f(y, \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0.$$

类似可得其它坐标面上的曲线绕坐标轴旋转的旋转面方程.

4. 柱面方程

平行于定直线 L 并沿定曲线 C 移动的直线 l 所生成的曲面称为柱面, 其中动直线 l 在移动中的每一个位置称为柱面的母线, 曲线 C 称为柱面的准线.

以 Oxy 平面上的曲线 $C: \begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ 为准线, 母

线平行于 z 轴的柱面方程为 $f(x, y) = 0$.

同理方程 $g(y, z) = 0$ 和 $h(x, z) = 0$ 分别表示母线平行于 x 轴和 y 轴的柱面.

5. 曲线在坐标面上的投影

在空间曲线 $C: \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 的方程中, 经过同

解变形分别消去变量 x, y, z , 则可得到 C 在 Oyz 平面、 Oxz 平面及 Oxy 平面上的投影曲线, 分别形如

$$\begin{cases} F(y, z) = 0, \\ x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} G(x, z) = 0, \\ y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} H(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

(三) 空间中的平面与直线方程

1. 平面方程

(1) 点法式: 给定空间中的点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 及非零向量 $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$, 则经过点 P_0 且与 $\mathbf{n}$ 垂直的平面方程为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

其中 $\mathbf{n}$ 称为平面的法向量.

(2) 一般式: $Ax + By + Cz + D = 0$, 其中 A, B, C 不全为零.

(3) 截距式: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, 其中 a, b, c 全不为零.

(4) 两个平面之间的关系:

设两个平面 π_1 与 π_2 的法向量依次为 $\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ 和 $\mathbf{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$, π_1 与 π_2 的夹角 θ 规定为它们法向量的

夹角(取锐角),这时

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} \\ &= \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.\end{aligned}$$

两个平面平行的充要条件是: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$;

两个平面垂直的充要条件是: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

2. 直线方程

(1) 一般式:将直线表示为两个平面的交线

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

(2) 若直线 L 经过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 且与向量 $\mathbf{v} = \langle l, m, n \rangle \neq 0$ 平行,则 L 的方程为

① 对称式:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n};$$

② 参数式:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty.$$

其中 $\mathbf{v} = \langle l, m, n \rangle$ 称为直线 L 的方向向量.

(3) 两条直线之间的关系:

设两条直线 L_1 和 L_2 方向向量分别为 $\mathbf{v}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$, $\mathbf{v}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$, L_1 与 L_2 的夹角 θ 规定为它们方向向量的夹角(取锐角), 于是

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2|} \\ &= \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.\end{aligned}$$

L_1 与 L_2 平行的充要条件是: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$;

L_1 与 L_2 垂直的充要条件是:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0,$$

3. 直线与平面的关系

设直线 L 的方向向量为 $\mathbf{v} = \{l, m, n\}$, 平面 π 的法向量为 $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$, L 与 π 的夹角 θ 规定为 L 与它在 π 上投影直线 L' 的夹角(锐角), 这时

$$\begin{aligned}\sin\varphi &= \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{n}|} \\ &= \frac{|lA + mB + nC|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.\end{aligned}$$

L 与 π 垂直的充要条件是: $\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}$;

L 与 π 平行的充要条件是: $lA + mB + nC = 0$.

(四) 二次曲面

由三元二次方程所表示的曲面统称为二次曲面. 通常使用截痕法来判断二次曲面的形状. 一些常用的二次曲面的标准形式如下:

(1) 球面: 球心在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径为 R 的球面方程为

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

(2) 椭球面:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ 其中 } a > 0, b > 0, c > 0.$$

(3) 椭圆抛物面:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \text{ 其中 } a > 0, b > 0.$$

(4) 椭圆锥面:

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \text{ 其中 } a > 0, b > 0.$$

(5) 单叶双曲面:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ 其中 } a > 0, b > 0, c > 0.$$

(6) 双叶双曲面:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \text{ 其中 } a > 0, b > 0, c > 0.$$

二、多元函数的微分学

(一) 多元函数的定义、极限、连续及其性质

1. 多元函数

设 x, y, z 是三个变量. 如果变量 x, y 在一定范围内变化时, 对于 x, y 的每一组取值, 变量 z 按照某个法则 f 总有确定的值与 x, y 对应, 则称变量 z 是变量 x, y 的二元函数, 简称为函数, 记为 $z = f(x, y)$ 或 $z = z(x, y)$ 或 $f(x, y)$, 并称变量 x, y 为函数的自变量, 称变量 z 为因变量.

多元函数的定义与二元函数类似.

2. 二重极限

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个去心邻域 $U^\circ(P_0)$ 中有定义. 当点 $P(x, y)$ 无限接近点 P_0 时, 函数在点 P 的函数值 $f(x, y)$ 与某个实数 A 也无限接近, 则称 A 是函数 $f(x, y)$ 在点 P_0 处的二重极限, 简称为极限, 记为

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \quad \text{或} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A.$$

性质 函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的二重极限存在的充分必要条件是: 点 $P(x, y)$ 以任何方式趋向于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 函数 $f(x, y)$ 的极限都存在且相等.

用这个性质判断函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的二重极限不存在是很方便的. 例如, 若点 $P(x, y)$ 沿两条不同的路径趋于 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 函数 $f(x, y)$ 的极限不同, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 不存在.

3. 连续性

如果 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, 则称函数 $f(x, y)$ 在

点 (x_0, y_0) 处连续.

初等函数在其有定义的区域内部处处连续.

4. 最值定理

如果 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $f(x, y)$ 在 D 上一定有最大值和最小值. 由此可知, 有界闭区域上的连续函数一定有界.

5. 介值定理

设 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, M 和 m 分别是 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值和最小值. 对于任何实数 c , 只要满足 $m \leq c \leq M$, 则至少存在一点 $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$ 使得 $f(\bar{x}, \bar{y}) = c$.

(二) 偏导数与全微分

1. 偏导数

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内有定

义. 固定 $y = y_0$, 对于一元函数 $F(x) = f(x, y_0)$ 的自变量在 x_0 处给出增量 Δx , 则有增量

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

若极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限值为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数, 记为

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, f_x(x_0, y_0), z_x(x_0, y_0), \\ z_x \left|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, z_x \right|_{(x_0, y_0)} \text{ 等.}$$

类似地, 可定义函数对 y 的偏导数及多元函数的偏导数.

对多元函数中的某一个自变量求偏导数, 就是将其余的自变量看做常数, 对这个变量求一元函数的导数.

2. 高阶偏导数

设函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内有偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y)$. 如果这两个偏导函数在 D 内

仍有偏导数,则称它们的偏导数为函数的二阶偏导数.二元函数的二阶偏导数共有四个,其记号和意义分别为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = f_{11}(x, y), \text{或记为}$$

$$f_{11}, z_{11};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = f_{12}(x, y), \text{或记为}$$

$$f_{12}, z_{12};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y) = f_{21}(x, y), \text{或记为}$$

$$f_{21}, z_{21};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = f_{22}(x, y), \text{或记为}$$

$$f_{22}, z_{22}.$$

其中, $f_{xy}(x, y)$ 及 $f_{yx}(x, y)$ 称为二阶混合偏导数.

性质 如果函数 $z = f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 $f_{xy}(x, y)$ 及 $f_{yx}(x, y)$ 都连续,则它们相等.

3. 全微分

设二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 某个邻域中的全增量为

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

如果它可以表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中 A, B 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$, 仅与 x, y 有关, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $o(\rho)$ 是 ρ 的高阶无穷小量 ($\rho \rightarrow 0$), 则称该函数在点 (x, y) 处可微, 称 $A\Delta x + B\Delta y$ 为该函数在点 (x, y) 处的全微分, 记为 dz .

当函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微时,

$$f_x(x, y) = A, f_y(x, y) = B.$$

记 $\Delta x = dx, \Delta y = dy$, 于是

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy \quad \text{或} \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

性质 如果函数 $z = f(x, y)$ 的两个偏导数在点 (x, y) 处连续, 则函数在该点可微.

同理可以定义三元函数 $u = f(x, y, z)$ 的全微分, 并有

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

4. 可微、可导及连续之间的关系

在多元函数中, 可微、可导及连续之间的关系与一元函数的情况有所不同. 在多元函数中有:

- (1) 可微必可导, 可导不一定可微;
- (2) 可微必连续, 连续不一定可微;

(3) 可导不一定连续, 连续不一定可导.

5. 复合函数的偏导数

复合函数的求导公式(链式法则):

(1) 若 $z = f(u, v)$, $u = \varphi(x)$, $v = \phi(x)$ 可微, 则复合函数 $z = f[\varphi(x), \phi(x)]$ 可导, 并有

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx};$$

(2) 若 $z = f(u, v)$, $u = \varphi(x, y)$, $v = \phi(x, y)$ 可微, 则复合函数 $z = f[\varphi(x, y), \phi(x, y)]$ 的偏导数存在, 并有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y};$$

(3) 若 $z = f(u)$, $u = \varphi(x, y)$ 可微, 则复合函数 $z = f[\varphi(x, y)]$ 的偏导数存在, 并有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}.$$

6. 隐函数的偏导数

(1) 设二元函数 $F(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域中有连续的偏导数, 且

$$F_y(x_0, y_0) \neq 0, F(x_0, y_0) = 0,$$

则方程 $F(x, y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域中可唯一确定具有连续导数的函数 $y = f(x)$, 使得 $y_0 =$

$f(x_0)$, 并有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

(2) 设三元函数 $F(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的某个领域中具有连续的偏导数, 且

$$F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0, F(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

则方程 $F(x, y, z) = 0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的某邻域中可唯一确定具有连续偏导数的函数 $z = f(x, y)$, 使得 $z_0 = f(x_0, y_0)$, 并有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

(三) 二元函数的极值

1. 极值的定义

设函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 上有定义, 点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域 $U \subset D$.

如果对于 U 中异于 $P_0(x_0, y_0)$ 的任何点 $P(x, y)$, 总有不等式 $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ 成立, 则称 $f(x_0, y_0)$ 为函数的极大值, $P_0(x_0, y_0)$ 称为极大值点.

如果对于 U 中异于 $P_0(x_0, y_0)$ 的任何点 $P(x, y)$, 总有不等式 $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ 成立, 则称 $f(x_0, y_0)$ 为函数的极小值, $P_0(x_0, y_0)$ 称为极小值点.

2. 取得极值的必要条件

性质 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的两个偏导数都存在, 且在该点函数取得极值, 则

$$f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0.$$

使得函数 $z = f(x, y)$ 的两个偏导数都等于零的点称为驻点. 与一元函数类似, 可导的极值点必是驻点, 但极值点不一定是驻点.

3. 取得极值的充分条件

性质 设 $z = f(x, y)$ 在驻点 (x_0, y_0) 的某个邻域内有二阶的连续偏导数, 令

$$A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0), \Delta = B^2 - AC, \text{ 于是有}$$

(1) 如果 $\Delta < 0$, 则点 (x_0, y_0) 是函数的极值点, 且当 $A < 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 是极大值; 当 $A > 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 是极小值.

(2) 如果 $\Delta > 0$, 则点 (x_0, y_0) 不是函数的极值点.

(3) 如果 $\Delta = 0$, 则函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有无极值不能确定, 需要其它方法判别.

4. 条件极值

(1) 求二元函数 $z = f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值, 可以按照如下步骤进行:

① 构造拉格朗日函数: $L(x, y) = f(x, y) +$

$\lambda\varphi(x, y)$.

② 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = f_x(x, y) + \lambda\varphi_x(x, y) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = f_y(x, y) + \lambda\varphi_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

若 λ_0, x_0, y_0 是方程组的解, 则 (x_0, y_0) 是该条件极值问题的可疑极值点.

(2) 求三元函数 $z = f(x, y, z)$ 在约束条件 $\varphi(x, y, z) = 0$ 下的极值点, 步骤、方法类似于二元函数求极值.

(四) 多元微分学的几何应用

1. 空间曲线的切线与法平面

给定空间曲线 $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ 其中的三个函数有连

续的导数且导数不同时为零. 设 L 上的点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 对应的参数为 t_0 , 则曲线 L 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切向量为

$$\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}.$$

此时的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)};$$

曲线 L 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的法平面方程为:

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

2. 曲面的切平面与法线

给定曲面 Σ 的方程 $F(x, y, z) = 0$, 函数 $F(x, y, z)$ 有连续的偏导数且三个偏导数不同时为零. 设点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是 Σ 上的一个点, 则曲面 Σ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法向量为

$$\{F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\}.$$

此时的切平面方程为

$$F_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x-x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y-y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z-z_0) = 0;$$

曲面 Σ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

(五) 方向导数与梯度

1. 方向导数

若函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 $P(x, y, z)$ 可微, 方向 l 的方向余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, 则函数在点 $P(x, y, z)$ 沿方向 l 的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma.$$

2. 梯度

设函数 $u = f(x, y, z)$ 在空间区域 G 内可微, 则函数在点 $P_0(x_0, y_0, z_0) \in G$ 处的梯度定义为一个向量

$$\text{grad} f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}.$$

梯度方向是函数变化率最大的方向, 在梯度方向上函数的方向导数取得最大值

$$|\text{grad} f(x_0, y_0, z_0)|.$$

三、重积分

(一) 二重积分

1. 二重积分的定义

设 $z = f(x, y)$ 是定义在有界闭区域 D 上的函数, 将 D 任意分割成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ (也表示相应的面积), 在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取点 (ξ_i, η_i) 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 并作和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$. 如果各小闭区域直径中的最大值 λ 趋于零时, 这个和式的极限存在, 则称此极限值为函数 $z = f(x, y)$ 在闭区域 D 上的二重积分, 记做

$$\iint_D f(x, y) d\sigma, \text{ 即 } \iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

直角坐标下的面积元素可记为 $d\sigma = dx dy$, 此时的

二重积分可记为 $\iint_D f(x, y) dx dy$.

若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 一定存在.

2. 二重积分的性质

假定以下所给出的函数都是可积的.

(1) 线性性质:

$$\iint_D k f(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma, \text{ 其中 } k \text{ 是常数};$$

$$\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] d\sigma = \iint_D f(x, y) d\sigma \pm \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

(2) 区域可加性: 若积分区域 D 被分为两部分 D_1 和 D_2 , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

(3) 单调性: 若在 D 上恒有 $f(x, y) \geq g(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \geq \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

由单调性(3)可推知 $|\iint_D f(x, y) d\sigma| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma$.

若在 D 上恒有 $f(x, y) \geq 0$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma \geq 0$.

(4) 估值公式: 设在 D 上恒有 $m \leq f(x, y) \leq M$, 其中 m, M 为常数, 则

$$m \cdot |D| \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M \cdot |D|,$$

其中 $M \cdot |D|$ 表示区域 D 的面积.

(5) 积分中值定理: 设 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则在 D 上至少存在一点 (ξ, η) , 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot |D|,$$

由性质(5)可推知 $\iint_D d\sigma = |D|$.

(二) 二重积分的计算

1. 直角坐标下二重积分的计算

(1) 若积分区域可以表示为 $D: a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy;$$

(2) 若积分区域可以表示为 $D: c \leq y \leq d, \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx.$$

2. 极坐标下二重积分的计算

直角坐标与极坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad (0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta < 2\pi).$$

此时面积元素为 $d\sigma = r dr d\theta$ 或 $dx dy = r dr d\theta$. 若在极坐标下积分区域可以表示为

$$D: \alpha \leq \theta \leq \beta, \varphi_1(\theta) \leq r \leq \varphi_2(\theta),$$

则

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr. \end{aligned}$$

(三) 三重积分

三重积分的定义和性质、计算类似于二重积分, 这里不再重复.

(四) 重积分的应用

1. 曲顶柱体的体积

设曲面 Σ 的方程为 $z = f(x, y), (x, y) \in D$, 其中 D 是有界闭区域, 如果函数 $f(x, y)$ 连续且 $f(x, y) \geq 0$, 则以 D 为底, Σ 为顶的曲顶柱体的体积

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

2. 质量

设质量在平面板 D 上连续分布, 密度为 $\rho(x, y) \geq$

0, 则平板的质量

$$M = \iint_D \rho(x, y) dx dy.$$

设物质的质量在空间物体 Ω 上连续分布, 密度为 $\rho(x, y, z) \geq 0$, 则物体的质量为

$$M = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

3. 曲面面积

设曲面 Σ 的方程为 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, 其中 D 是有界闭区域, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上有连续的偏导数, 则曲面 Σ 的面积为

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} d\sigma.$$

四、曲线积分与曲面积分

(一) 曲线积分、曲面积分的计算公式

1. 对弧长的曲线积分的计算公式

在 $\int_L f(x, y) ds$ 中, L 为一段光滑的平面曲线, 设 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

$f(x, y)$ 为定义在曲线 L 上的一连续函数.

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^\beta f[x(t), y(t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

值得注意的是,为保证 ds 为正,必须 $\alpha < \beta$, 以使 $dt > 0$.

类似地,对 L 是空间曲线段的情况,有类似的公式.

$$\begin{aligned} \int_L f(x, y, z) ds &= \\ \int_a^\beta f[x(t), y(t), z(t)] &\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt. \end{aligned}$$

2. 对坐标的曲线积分

在 $\int_{L_{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 中, L_{AB} 是以 A 为起点,以 B 为终点的光滑平面曲线. 设 L_{AB} 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (t \text{ 介于 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 之间, 取到 } \alpha, \beta).$$

A 点的坐标为 $(x(\alpha), y(\alpha))$, B 点的坐标为 $(x(\beta), y(\beta))$.

对坐标的曲线积分的计算公式为

$$\begin{aligned} \int_{L_{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \\ = \int_a^\beta \{ P[x(t), y(t)] x'(t) + Q[x(t), y(t)] y'(t) \} dt. \end{aligned}$$

因为 dx, dy 为向量 ds (从 A 向 B 的方向) 的坐标, 所以 α, β 分别对应于点 A, B 的参数 t 的值, 可能 $\alpha < \beta$, 也可能 $\alpha > \beta$.

类似地, 对于空间曲线 L_{AB} , 也有类似的计算公式.

$$\begin{aligned}& \int_{L_{AB}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\&= \int_a^\beta \{ P[x(t), y(t), z(t)] x'(t) + Q[x(t), y(t), \\& \quad z(t)] y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)] z'(t) \} dt.\end{aligned}$$

3. 对面积的曲面积分

在 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ 看, Σ 是一块光滑曲面. 设 Σ 的方程为 $z = z(x, y)$, 它在 Oxy 平面上的投影区域为 D_{xy} , $f(x, y, z)$ 是定义在曲面 Σ 上的连续函数.

$$\begin{aligned}& \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \\&= \iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \text{或} \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \\&= \iint_{D_{zx}} f[x, y(z, x), z] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dz dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \text{或} \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \\&= \iint_{D_{yz}} f[x(y, z), y, z] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz.\end{aligned}$$

4. 对坐标的曲面积分

在 $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$ 中, Σ 是一块光滑有向曲面. 设 Σ 方程为 $z = z(x, y)$, 它在 Oxy 平面上的投影区域为 D_{xy} . 如果 Σ 的法向量与 z 轴的正向的夹角为 γ , 则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \begin{cases} + \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy, & 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}, \\ - \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy, & \frac{\pi}{2} < \gamma < \pi, \\ 0, & \gamma = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

类似地, 有以下的公式:

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \begin{cases} + \iint_{D_{zx}} Q[x, y(z, x), z] dz dx, & 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \\ - \iint_{D_{zx}} Q[x, y(z, x), z] dz dx, & \frac{\pi}{2} < \beta < \pi, \\ 0, & \beta = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz = \begin{cases} + \iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z] dydz, & 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \\ - \iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z] dydz, & \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \\ 0, & \alpha = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

(二) 格林公式和平面曲线积分与路径无关的条件

1. 格林公式

设有界闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成, 函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上具有连续的一阶偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy,$$

其中 L 是 D 的取正向的边界曲线.

2. 平面曲线积分与路径无关的条件

设开区域 D 是一个单连通区域, 函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数, 则曲线积分

$\int_L P dx + Q dy$ 在 D 内与路径无关(或沿 D 内任何一条闭

曲线的线积分为 0) 的充分必要条件是 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 在 D 内处处成立.

(三) 高斯公式

设空间有界闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, 函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在 Ω 上具有连续的一阶偏导数, 则有

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv \\ &= \oiint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dx dy, \end{aligned}$$

其中 Σ 取外侧.

五、常微分方程

(一) 微分方程的基本概念

(1) 微分方程 称含有未知函数的导数或微分的方程式为微分方程.

(2) 微分方程的阶 称微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数为微分方程的阶.

(3) 微分方程的解 如果函数 $y = y(x)$ 代入微分方程中, 能使微分方程成为恒等式, 则称 $y = y(x)$ 为该微分方程的解.

(4) 微分方程的通解 n 阶微分方程的含有 n 个任意常数的解, 叫做该微分方程的通解.

(5) 微分方程的特解 确定了通解中一组任意常数的值, 所得到的就是微分方程的一个特解.

(6) 初值问题 设 $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ 为一组确定的数值. 求 n 阶微分方程满足初始条件 $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$ 的特解问题叫做微分方程的初值问题.

(二) 三种一阶微分方程的标准形及其解法

1. 可分离变量的方程

标准形 $y' = f(x)g(y)$.

解法 分离变量得 $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$,

两边积分得 $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$.

2. 齐次方程

标准形 $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

解法 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 从而原方程化为以 x 为自变量, 以 u 为未知函数的可分离变量的微分方程

$$x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u.$$

3. 一阶线性微分方程

标准形 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$. (1)

解法 1 常数变易法.

先解方程(1)对应的齐次方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$, 得其通解 $y = Ce^{-\int p(x)dx}$; 再将其中的常数 C 换成函数 $u(x)$, 即令 $y = u(x)e^{-\int p(x)dx}$; 然后, 代入方程(1), 求出 $u(x)$.

解法 2 公式法.

微分方程(1)的通解为

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right].$$

(三) 三种可降阶的二阶微分方程及其解法

(1) 标准形 $y'' = f(x)$.

解法 直接积分两次即可得结果.

(2) 标准形 $y'' = f(x, y')$ (y'' 已解出, 其中不显含 y).

解法 令 $p = y'$, 代入原方程, 则原方程化为以 x 为自变量, 以 p 为未知函数的一阶微分方程 $\frac{dp}{dx} = f(x, p)$, 解之.

(3) 标准形 $y'' = f(y, y')$ (y'' 已解出, 其中不显含 x).

解法 令 $p = y'$, 则 $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} =$

$p \frac{dp}{dy}$. 代入原方程, 原方程化为以 y 为自变量, 以 p 为未知

函数的一阶微分方程 $p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$. 解之.

(四) 线性微分方程的性质与解的结构

1. 二阶线性齐次微分方程解的性质

二阶线性齐次微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2)$$

的解有如下性质:

设 $y_1(x), y_2(x)$ 都是二阶线性齐次微分方程(2)的解, 则对任意常数 C_1, C_2 ,

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是方程(2)的解.

2. 二阶线性齐次微分方程通解的结构

如果 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程(2)的两个线性无关的解, 则方程(2)的通解为

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

3. 二阶线性非齐次微分方程通解的结构

设 y^* 是二阶线性非齐次微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (3)$$

的一个特解, $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 是方程(3)所对应的齐次方程的通解, 则

$$y = y^* + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

为非齐次微分方程(3)的通解.

(五) 二阶常系数线性微分方程通解的求法

1. 二阶常系数线性齐次微分方程的解法

$$\text{标准形 } y'' + py' + qy = 0. \quad (4)$$

解法 特征根法.

写出方程(4)的特征方程

$$r^2 + pr + q = 0. \quad (5)$$

根据特征方程解的不同情况,写出方程(4)的通解,公式如下表:

特征方程根的情况	方程(4)的通解
两个不相等的实根 r_1, r_2	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
一个二重根 r	$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$
一对共轭复根 $\alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

2. 二阶常系数线性非齐次微分方程的解法

$$\text{标准形 } y'' + py' + qy = f(x). \quad (6)$$

解法 先求出对应的齐次微分方程(4)的通解及原非齐次微分方程(6)的一个特解,再相加即得方程(6)的通解,其中方程(6)的特解求法如下:

只考虑如下情况:

$$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x),$$

其中 $P_m(x)$ 是 m 次多项式, 应用待定系数法求特解, 关键是确定特解的形式. 这要根据右端项 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 中, λ 是不是微分方程(6)所对应的齐次方程的特征根的情况按下表确定:

λ 的情况	方程(6)的特解形式
λ 不是对应齐次方程的特征根	$y^* = e^{\lambda x} Q_m(x)$
λ 是对应齐次方程的特征根, 且为单根	$y^* = x e^{\lambda x} Q_m(x)$
λ 是对应齐次方程的特征根, 且为二重根	$y^* = x^2 e^{\lambda x} Q_m(x)$

注: 表中, $Q_m(x)$ 是 m 次的多项式, 其系数 $b_0, b_1, \dots, b_m$ 待定.

六、无穷级数

(一) 数项级数

1. 数项级数收敛的定义

给定数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 称

$$s_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

为它的第 n 个部分和, 称 $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ 为它的部分和数列. 如果该数列有极限, 即存在常数 s , 使 $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$,

则说常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 并称 s 为该级数的和, 记为

$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$; 否则, 即它的部分和数列 $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ 无极限(包括无穷大), 则称该级数发散.

2. 数项级数的基本性质

性质 1 设 C 是任意非零常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和

$\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ 的敛散性相同, 且当收敛时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n = C \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

性质 2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于和 s, σ ,

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 且其和为 $s \pm \sigma$.

性质 3 在级数中去掉、增加或改变有限项, 其敛散性不变.

性质 4 收敛级数任意加括号所得的级数仍收敛, 且其和不变.

3. 级数收敛的必要条件

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

4. 两个重要级数及其敛散性

(1) 几何级数: $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots (a \neq 0)$.

当 $|q| < 1$ 时, 该级数收敛, 其和为 $\frac{a}{1-q}$;

当 $|q| \geq 1$ 时, 该级数发散.

(2) p 级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots (p > 0)$.

当 $p > 1$ 时, 该级数收敛; 当 $p \leq 1$ 时, 该级数发散.

当 $p = 1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$, 称为调和级数, 它是一个发散级数.

5. 正项级数的审敛法

若对一切自然数 n , 都有 $u_n \geq 0$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数.

判别正项级数敛散性的主要方法如下:

(1) 比较审敛法 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数,

且 $u_n \leq v_n (n = 1, 2, \cdots)$. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

(2) 比较审敛法的极限形式 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l (0 < l < +\infty)$, 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散.

(3) 比值审敛法 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的后项与前项之比的极限等于 ρ , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则当 $\rho < 1$ 时, 级数收敛; 当 $\rho > 1$ (包括 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$) 时, 级数发散; 当 $\rho = 1$ 时, 级数可能收敛, 也可能发散.

(4) 根值审敛法 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的一般项 u_n 的 n 次方根 $\sqrt[n]{u_n}$ 的极限等于 ρ , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则当 $\rho < 1$ 时, 级数收敛; 当 $\rho > 1$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty$) 时, 级数发散; 当 $\rho = 1$ 时, 级数可能收敛, 也可能发散.

6. 交错级数的莱布尼茨审敛法

设 $u_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$, 称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 和

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 为交错级数, 它们具有相同的敛散性.

莱布尼茨审敛法 设 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 为交错级数.

如果 u_n 满足:

(1) 对一切自然数 n 有 $u_{n+1} \leq u_n$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$,

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛, 且其和 $s \leq u_1$.

7. 级数的绝对收敛和条件收敛

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

对任意项级数, 如果它绝对收敛, 则它必收敛.

(二) 幂级数

1. 幂级数的收敛半径、收敛区间和收敛域

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$, 则当 ρ 为

非零正数时, $R = \frac{1}{\rho}$; 当 $\rho = 0$ 时, $R = +\infty$; 当 $\rho = +\infty$

时, $R = 0$.

求出收敛半径 R 后, 得收敛区间为 $(-R, R)$. 再分别用 $x = R, x = -R$ 代入原幂级数, 讨论幂级数在区间端点处的收敛性, 从而求出幂级数的收敛域.

2. 幂级数的性质

性质 1(和函数连续性) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R (0 < R \leq +\infty)$, 则其和函数 $s(x)$ 在 $(-R, R)$ 内连续. 如果它在 $x = R$ (或 $-R$) 处收敛, 则和函数 $s(x)$ 在 $(-R, R]$ (或 $[-R, R)$) 上连续.

性质 2(逐项积分)

$$\begin{aligned}\int_0^x s(t) dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.\end{aligned}$$

性质 3(逐项求导)

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

3. 函数的幂级数展开式

设函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 附近有任何阶导数, 称幂级数

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots +$$

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$$

为 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒级数, 并称 $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (n=0, 1, 2, \cdots)$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒系数.

特别地, 当 $x_0 = 0$ 时, 称幂级数

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

为 $f(x)$ 的马克劳林级数, 并称 $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ 为 $f(x)$ 的马克劳林系数.

根据函数的幂级数展开式的唯一性知, 如果 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 的某个邻域内能展开成幂级数, 则该幂级数必有 $f(x)$ 在点 x_0 的泰勒级数.

4. 几个常用函数的幂级数展开式

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, -1 < x \leq 1;$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, -1 < x < 1;$$

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \\ &\quad \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots, \end{aligned}$$

对任意的 α , 上式在 $-1 < x < 1$ 内都成立.

(三) 傅里叶级数

1. 傅里叶系数和傅里叶级数的定义

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 由公式

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

所确定的系数称为 $f(x)$ 的傅里叶系数, 称由上述傅里叶系数所确定的级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

为 $f(x)$ 的傅里叶级数.

2. 傅里叶级数的收敛定理

定量(收敛定理) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 如果它满足

(i) 在一个周期内连续或者只有有限个第一类间断点;

(ii) 在一个周期内至多有有限个极值点,

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $(-\infty, +\infty)$ 收敛, 并且

(1) 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时, 傅里叶级数收敛于 $f(x)$;

(2) 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时, 傅里叶级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$.

第二部分 核心题型

【典例精析 1】 设向量 $i + 2j + 3k$ 与 $2i + mj + 6k$ 垂直, 则 $m =$ ()

- A. 4 B. -4
C. 10 D. -10

【解析】 两向量 a 与 b 垂直的充要条件是 $a \cdot b = 0$
由题意知 $(i + 2j + 3k) \cdot (2i + mj + 6k) = 2 + 2m + 18 = 0$ $\therefore m = -10$, 故选 D.

【典例精析 2】 方程 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 表示的图形是 ()

- A. 椭球面 B. 椭圆抛物面
C. 椭圆锥面 D. 单叶双曲面

【解析】 方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (其中 $a > 0, b > 0, c > 0$) 所表示的曲面为椭球面, 方程 $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ($a > 0, b > 0$) 表示的为椭圆抛物面, 方程 $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ($a > 0, b > 0$) 表示的为椭圆锥面, 方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a > 0, b > 0, c > 0$) 表示的为单叶双曲面.

$b > 0, c > 0$) 表示的为单叶双曲面, 故由此可知 $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{z^2}{1^2} = 1$ 为椭球面, 故选 A.

[典例精析 3] 过点 $(2, 3, -4)$ 且垂直于平面 $2x + 3y - z + 2 = 0$ 的直线方程是 ()

A. $\frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{-1}$

B. $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-1}$

C. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-1}$

D. $2(x-2) + 3(y-3) - (z+4) = 0$

【解析】平面的法向量 $\boldsymbol{n} = \{2, 3, -1\}$, 因为直线垂直于该平面, 故该直线的方向向量 $\boldsymbol{v} // \boldsymbol{n}$, 故取 $\boldsymbol{v} = \{2, 3, -1\}$, 因此直线的方程为 $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-1}$, 故选 C.

[典例精析 4] 已知 $\boldsymbol{a} = \{1, 1, -4\}$, $\boldsymbol{b} = \{1, -2, 2\}$, 求 (1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$; (2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角; (3) $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影 a_b .

【解析】(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1 \times 1 + 1 \times (-2) + (-4) \times 2 = -9$

(2) 设夹角为 φ , 那么

$$\begin{aligned}
 \cos \varphi &= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \\
 &= \frac{-9}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \varphi = \frac{3}{4}\pi$$

$$(3) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi = |\mathbf{b}| a_b$$

$$\therefore \mathbf{a} \text{ 在 } \mathbf{b} \text{ 上的投影为 } a_b = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{-9}{3} = -3$$

[典例精析 5] 已知向量 $\mathbf{a} = \{1, 0, -2\}$, $\mathbf{b} = \{1, 1, 0\}$, 试求向量 $\mathbf{c}$, 使 $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$ 且 $|\mathbf{c}| = 6$.

【解析】 设 $\mathbf{c} = \{x, y, z\}$

$$\because \mathbf{c} \perp \mathbf{a} \quad \therefore \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = x - 2z = 0$$

$$\because \mathbf{c} \perp \mathbf{b} \quad \therefore \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = x + y = 0$$

$$\because |\mathbf{c}| = 6 \quad \therefore \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 6$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 4 \\ y = -4 \\ z = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -4 \\ y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\therefore \text{向量 } \mathbf{c} = \{4, -4, 2\} \text{ 或 } \mathbf{c} = \{-4, 4, -2\}$$

[典例精析 6] 求直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ 与平

面 $2x + y + z - 6 = 0$ 的交点.

【解析】 所给直线的参数方程为 $x = 2 + t, y = 3 + t, z = 4 + 2t$, 代入平面方程中, 得

$$2(2 + t) + (3 + t) + (4 + 2t) - 6 = 0$$

解方程, 得 $t = -1$, 把求得的 t 值代入直线的参数方程中, 得 $x = 1, y = 2, z = 2$, 即得所求交点的坐标为 $(1, 2, 2)$.

[典例精析 7] 设函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域中有定义, 则下列结论正确的是 ()

- A. 若 $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ 都存在, 则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续
- B. 若 $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ 都存在, 则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微
- C. 若 $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ 都不存在, 则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处不连续
- D. 若 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 都在点 (x_0, y_0) 处连续, 则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续

【解析】 本题考查二元函数在某点的性态.

函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微的必要条件是 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数都存在, 而函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微的充分条件是 $f(x, y)$ 的两个偏导数在点 (x_0, y_0) 处连续. 又因为可微必连续, 故选项 D 正确.

[典例精析 8] 设函数 $f(x, y) = y^2 - x^2 + 5$, 则点 $(0, 0)$ ()

- A. 是 $f(x, y)$ 的极小值点
- B. 是 $f(x, y)$ 的极大值点
- C. 不是 $f(x, y)$ 的驻点
- D. 是 $f(x, y)$ 的驻点但不是极值点

【解析】 本题考查函数在某点是否取极值点.

$$f(x, y) = y^2 - x^2 + 5, \frac{\partial f}{\partial x} = -2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \text{ 则 } x = y = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2,$$

所以 $\Delta = 0 - (-2 \times 2) = 4 \geq 0$, 所以 $(0, 0)$ 点不是 $f(x, y)$ 的极值点, 是 $f(x, y)$ 的驻点, 故选 D.

[典例精析 9] 函数 $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 在点 $M(1, 2, -2)$ 处的梯度为 _____

【解析】 本题考查函数在某点处的梯度.

$$u = \ln(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\text{所以 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(1,2,-2)} = \frac{2}{9}, \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(1,2,-2)} = \frac{4}{9},$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{(1,2,-2)} = -\frac{4}{9}, \text{ 所以函数 } u \text{ 在点 } M(1,2,-2) \text{ 处}$$

的梯度为 $\frac{2}{9}\{1, 2, -2\}$.

[典例精析 10] 曲面 $z - e^z + 2xy = 3$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处的切平面方程为_____.

【解析】 $2x + y - 4 = 0$

本题考查曲面在某点处的切平面方程.

令 $F(x, y, z) = z - e^z + 2xy - 3$, 则在点 $(1, 2, 0)$ 处,

$$F_x = 2y = 4, F_y = 2x = 2, F_z = 1 - e^z = 0$$

所以切平面方程为

$$4(x-1) + 2(y-2) + 0(z-0) = 0$$

$$\text{即 } 2x + y - 4 = 0.$$

[典例精析 11] 求由方程 $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$ 确定的隐函数的导数或偏导数.

【解析】 本题考查隐函数的导数.

$$\text{设 } F(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \arctan \frac{y}{x},$$

$$\text{则 } F_x = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x + y}{x^2 + y^2},$$

$$F_y = \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{y - x}{x^2 + y^2},$$

$$\text{故 } \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x+y}{y-x} = \frac{x+y}{x-y}.$$

[典例精析 12] 求函数 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(1, 1)$ 处, 沿与 x 轴正向成 60° 角的方向 l 的方向导数.

【解析】 本题考查函数在某点处的方向导数.

$$z_x = 2x, z_y = -2y, \text{ 又 } \alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6},$$

故

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial l} &= z_x(1, 1)\cos\alpha + z_y(1, 1)\cos\beta \\ &= 2\cos\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{6} \\ &= 1 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

[典例精析 13] 造一个容积为 27m^3 的长方体水箱, 应如何选择水箱的尺寸可使得用料最省?

【解析】 本题考查极值的求解. 设水箱的长、宽、高分别为 x, y, z , 容积为 V , 表面积为 S , 则有

$$S = 2xy + 2yz + 2xz, xyz = 27$$

$$\text{令 } L(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2xz + \lambda(xyz - 27)$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} L_x = 2(y+z) + \lambda yz = 0 \\ L_y = 2(x+z) + \lambda xz = 0 \\ L_z = 2(x+y) + \lambda xy = 0 \\ xyz - 27 = 0 \end{cases} \quad \text{得可疑极}$$

值点(3,3,3)

因实际情况表面积 S 必存在最小值,而可疑点只有一个,故当水箱的长、宽、高都取 3 米时表面积最小,从而用料最省.

[典例精析 14] 设二次积分 $I = \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy$, 则交换积分次序后得 $I =$ _____.

【解析】 $\int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$

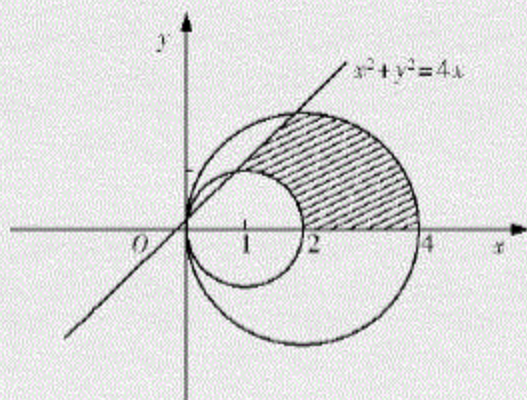
本题是有关多元函数二次积分的交换积分次序的问题,二次积分的积分区域 D 如右图阴影部分,故 $I =$

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$$

[典例精析 15] 由曲线 $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$ 所围成的图形的面积 $S =$ ()

- A. $\frac{1}{4}(2 + \pi)$ B. $\frac{1}{2}(2 + \pi)$
C. $\frac{3}{4}(2 + \pi)$ D. $2 + \pi$

【解析】 本题考查二重积分极坐标的计算.
由题意知曲线所围成的图形如图所示.



令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 其中 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

所以由曲线 $x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x, y = x, y = 0$ 所围成的图形的面积.

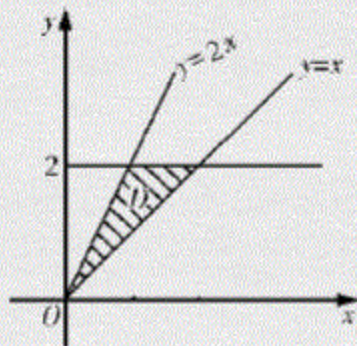
$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} r dr \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \cdot \frac{1}{2} r^2 \Big|_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6\cos^2\theta d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3(1 + \cos 2\theta) d\theta \\
 &= \left(3\theta + \frac{3}{2}\sin 2\theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3(2 + \pi)}{4}.
 \end{aligned}$$

故选 C.

[典例精析 16] 二重积分 $\iint_D (x^2 + y^2 - x) dx dy$, 其

中 D 是由直线 $y=2$, $y=x$ 及 $y=2x$ 所围成的闭区域, 画出积分区域并计算.

【解析】 本题考查二重积分的计算, D 如右图所示.



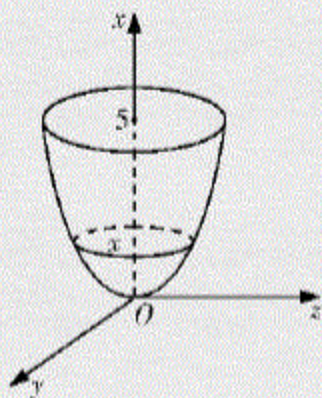
$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y (x^2 + y^2 - x) dx \\
 &= \int_0^2 \left(\frac{1}{3}x^3 + xy^2 - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_{\frac{y}{2}}^y dy \\
 &= \int_0^2 \left(\frac{19}{24}y^3 - \frac{3}{8}y^2 \right) dy \\
 &= \left(\frac{19}{4 \times 24}y^4 - \frac{1}{8}y^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{13}{6}.
 \end{aligned}$$

[典例精析 17] 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dv$,

其中 Ω 是由 Oxy 平面上的曲线 $y^2 = 2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x=5$ 所围成的闭区域.

【解析】 本题考查三重积分的计算, 如右图所示,

Oxy 平面上曲线 $y^2 = 2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面方程为 $y^2 + z^2 = 2x$, 故 Ω 是由曲面 $y^2 + z^2 = 2x$ 及平面 $x = 5$ 所围成的闭区域.



当 $0 \leq x \leq 5$ 时, 平面 $X = x$ 与 Ω 相交的区域为 $y^2 + z^2 \leq 2x$.

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dv &= \int_0^5 dx \iint_{y^2 + z^2 \leq 2x} (y^2 + z^2) dydz \\ &= \int_0^5 dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2x}} r^2 \cdot r dr \\ &= 2\pi \int_0^5 x^2 dx = 2\pi \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^5 \\ &= \frac{250}{3} \pi. \end{aligned}$$

[典例精析 18] $I = \oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$, 因

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ 所以} \quad (\quad)$$

A. 因 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在原点不存在, 故对任意的 $C, I \neq 0$

B. 对任意闭曲线 $C, I = 0$

C. 在 C 不含原点时, $I = 0$

D. 在 C 含原点时 $I = 0$, 不含原点时 $I \neq 0$

【解析】 本题考查曲线积分的计算.

设 C 是不包含原点的任一光滑闭曲线, 由于 $P(x, y), Q(x, y)$ 在不包含原点的任一连通区域内都有连续偏导数, 且 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ 所以 $I = \int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

[典例精析 19] 设 L 是圆周 $x^2 + y^2 = 4$, 这个圆周取逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L 3ydx - xdy = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解析】 -16π

本题考查曲线积分的计算.

由格林公式知 $P = 3y, Q = -x$, 所以

$$\begin{aligned} \oint_L 3ydx - xdy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D (-1 - 3) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -4 \iint_D dx dy \\
 &= -4 \times 4\pi \\
 &= -16\pi.
 \end{aligned}$$

[典例精析 20] 计算 $\int_L (x^3 + y^3) ds$ 的值, L 是 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $|x| \leq a$.

【解析】 本题考查曲线积分的计算, L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = acost \\ y = asint \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi,$$

$$\begin{aligned}
 \text{则 } \int_L (x^3 + y^3) ds &= \int_L x^3 ds + \int_L y^3 ds \\
 &= 0 + \int_0^\pi (asint)^3 \sqrt{(-asint)^2 + (acost)^2} dt \\
 &= a^4 \int_0^\pi \sin^3 t dt \\
 &= \frac{4}{3} a^4.
 \end{aligned}$$

[典例精析 21] 计算 $\iiint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$,

Σ 是旋转抛物面: $z = x^2 + y^2$, $z \leq 1$ 部分的外侧.

【解析】 本题考查曲面积分的计算.

$$\iint_{\Sigma} x dydz = \iint_{\Sigma_1} x_1 dydz + \iint_{\Sigma_2} x_2 dydz$$

其中 Σ_1 : 前半抛物面 $x_1 = \sqrt{z-y^2}$ 前侧,

Σ_2 : 后半抛物面 $x_2 = -\sqrt{z-y^2}$ 后侧

它们在 Oyz 面上投影区域为 $D_{yz}: y^2 \leq z \leq 1$.

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} x dydz \\ &= \iint_{D_{yz}} \sqrt{z-y^2} dydz - \iint_{D_{yz}} (-\sqrt{z-y^2}) dydz \\ &= 2 \iint_{D_{yz}} \sqrt{z-y^2} dydz \\ &= 2 \int_{-1}^1 dy \int_{y^2}^1 \sqrt{z-y^2} dz \\ &= \frac{4}{3} \int_{-1}^1 (1-y^2)^{3/2} dy = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \\ &= \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

由对称性知,

$$\iint_{\Sigma} y dzdx = \frac{\pi}{2}$$

又 Σ 在 Oxy 面的投影区域 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$ 且投影的符号为负,

因此,

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} z dx dy &= - \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr \\ &= - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{故 } \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

[典例精析 22] 计算 $\oint_{\Sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧.

【解析】 本题考查曲面积分的计算. 因为球面方程为 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 故在其上任意一点 (x, y, z) 处的单位法向量为

$$\boldsymbol{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \left\{ \frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a} \right\}$$

于是,

$$\oint_{\Sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \oint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{a^3} \\
&= \frac{1}{a^3} \oint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy \\
&= \frac{1}{a^3} \oint_{\Sigma} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) dS \\
&= \frac{1}{a^3} \oint_{\Sigma} \left(x \cdot \frac{x}{a} + y \cdot \frac{y}{a} + z \cdot \frac{z}{a} \right) dS \\
&= \frac{1}{a^4} \oint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS \\
&= \frac{1}{a^2} \oint_{\Sigma} dS = \frac{1}{a^2} \cdot 4\pi a^2 = 4\pi.
\end{aligned}$$

【典例精析 23】 设函数 $y = e^{2x} + (x+1)e^x$ 是二阶常系数线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 则常数 a, b, c 及该微分方程的通解为 _____

【解析】 将 $y = e^{2x} + (x+1)e^x$ 代入 $y'' + ay' + by = ce^x$ 得:

$$(4 + 2a + b)e^{2x} + (a + b + 1)xe^x + (3 + 2a + b)e^x = ce^x$$

$$\therefore \begin{cases} 4 + 2a + b = 0 \\ 1 + a + b = 0 \\ 3 + 2a + b = c \end{cases} \quad \text{即 } a = -3, b = 2, c = -1$$

∴ 该方程为 $y'' - 3y' + 2y = -e^x$

对应的齐次特征方程 $r^2 - 3r + 2 = 0$ 的根为 $r = 1, 2$, 所以通解 $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

∴ $y'' - 3y' + 2y = -e^x$ 的通解为 $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + [e^{2x} + (x+1)e^x] = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x e^x$

[典例精析 24] 微分方程 $(x^2 - 1)dy + (2xy - \cos x)dx = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 的特解为 _____.

【解析】 将所给微分方程改写成 $(x^2 dy + 2xy dx) - dy - \cos x dx = 0$

即 $d(x^2 y - y - \sin x) = 0$

所以, 所给微分方程通解为 $x^2 y - y - \sin x = C$

由 $y|_{x=0} = 1$ 得 $C = -1$ ∴ 满足初始条件的特解为 $x^2 y - y - \sin x + 1 = 0$

[典例精析 25] 求解方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x - y^2}$.

【解析】 本题考查微分方程的求解, 此方程对未知函数 $y = y(x)$ 来讲不是线性方程, 如将其改写为:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{y}x - y$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = -y$$

上述方程是以 $x = x(y)$ 为未知函数的一阶线性微分方程, $P(y) = -\frac{2}{y}, Q(y) = -y$

$$\begin{aligned}\text{故 } x &= e^{-\int(-\frac{2}{y})dy} \left[\int (-y) e^{\int(-\frac{2}{y})dy} dy + C \right] \\ &= e^{2\ln y} \left[\int (-y) \cdot e^{-2\ln y} dy + C \right] \\ &= y^2 \left[\int (-y) \cdot y^{-2} dy + C \right] \\ &= y^2 (C - \ln y)\end{aligned}$$

即为原方程的通解

[典例精析 26] 求下列微分方程满足所给初始条件的特解: $y'' + 4y' + 29y = 0, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 15$.

【解析】 本题考查微分方程的求解, 与原齐次方程对应的特征方程为

$$r^2 + 4r + 29 = 0$$

此方程的解为 $r_1 = -2 + 5i, r_2 = -2 - 5i$.

故所给方程的通解为

$$y = e^{-2x} (C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$$

$$\begin{aligned}y' &= 5e^{-2x} (-C_1 \sin 5x + C_2 \cos 5x) - 2e^{-2x} (C_1 \cos 5x \\ &\quad + C_2 \sin 5x)\end{aligned}$$

$$= e^{-2x} [(-5C_1 - 2C_2) \sin 5x + (5C_2 - 2C_1) \cos 5x]$$

把初始条件 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 15$ 代入上面两式

解得 $C_1 = 0, C_2 = 3$

故所求特解为

$$y = 3e^{-2x} \sin 5x$$

[典例精析 27] 设无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-p}}$ 收敛, 则

()

A. $p > 1$

B. $p < 3$

C. $p > 2$

D. $p < 2$

【解析】 本题考查级数敛散性的判定.

由级数收敛的条件可知, 当 $3-p > 1$, 即 $p < 2$ 时,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-p}}$ 收敛, 故选 D.

[典例精析 28] 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,

它在 $[-\pi, \pi)$ 上表达式为 $f(x) = \begin{cases} x^2, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$,

$s(x)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数, 则 $s(\pi)$ = _____.

【解析】 本题考查傅里叶级数的和函数.

因为 π 是 $[-\pi, \pi]$ 的端点, 所以

$$s(\pi) = \frac{1}{2}$$

$$= [f(\pi+0) + f(-\pi+0)]$$

$$= \frac{1}{2}[\pi + \pi^2]$$

$$= \frac{\pi}{2}(1 + \pi).$$

〔典例精析 29〕 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2}$ 的收敛半径和收敛域.

【解析】 因为 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 \text{ 所以收敛半径 } R = 1 \quad (2 \text{ 分})$$

由 $|x-3| < 1$ 得 $2 < x < 4$ 所以收敛区间为 $(2, 4)$

又因为当 $x = 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-3)^n}{n^2}$ 收敛

当 $x = 4$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-3)^n}{n^2}$ 收敛

所以收敛域为 $[2, 4]$ (3 分)

〔典例精析 30〕 将 $f(x) = \frac{1}{3-x}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数.

【解析】 本题考查函数的幂级数展开.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{3-x} = \frac{1}{2-(x-1)} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{x-1}{2} + \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \cdots + \right. \\
 &\quad \left. \left(\frac{x-1}{2}\right)^n + \cdots \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n} \quad (-1 < x < 3)
 \end{aligned}$$

更多优质自考资料尽在百度贴吧**自考乐园**俱乐部

(<http://tieba.baidu.com/club/5346389>) 欢迎♥加入...欢迎♥交流...止不住的惊喜等着你.....

☆自考乐园---心境随缘, 诚与天下自考人共勉!!!

☆自考乐园---分享快乐, 你的快乐老家!!!

☆自考乐园---引领成功, 你的精神乐园!!!

☆自考乐园---心境随缘, 诚与天下自考人共勉!!!

☆自考乐园---分享快乐, 你的快乐老家!!! ☆自考乐园---引领成功, 你的精神乐园!!!

自考乐园俱乐部, 专注于自考, 致力于成为全国最全, 最优的自考学习交流, 资料共享平台.....



以上资料由百度贴吧:

-----自考乐园俱乐部杨尚杰为你精心编辑

自考乐园 <http://tieba.baidu.com/club/5346389>
自考学习、交流、资料共享的好去处！
自考乐园，我们自考人自己的家园！一起成.....

☆自考乐园---心境随缘，诚与天下自考人共勉!!!
☆自考乐园---分享快乐，你的快乐老家!!!
☆自考乐园---引领成功，你的精神乐园!!!

各位自考的朋友：

大家好，我先介绍一下自己吧，我叫杨尚杰，由于种种原因，高考不是很理想，以至于在 08 年进入了一所民办专科院校，可是我并不认输，在大学除了积极锻炼自己外，在大一下学期，我依然选择了自考计算机网络专业独立本科，目前已顺利通过了 8 科，在自考征途中，本人也搜集了很多自考的资料（我会把我的资料上传到百度文库或新浪共享里，把下载网址整理后发到本俱乐部），本着“分享快乐”的观点，本人真诚的欢迎广大自考的朋友（尤其是报考和我相同专业的考生）加入本俱乐部，一起交流，进步，提高.....

俱乐部名称：自考乐园
俱乐部 id: **5346389**（请牢记它哦~在百度贴吧的搜索框中输入俱乐部 id，可以直接进入俱乐部）
俱乐部 url 地址: <http://tieba.baidu.com/club/5346389>
（您也可以通过此 url 进入俱乐部。）

俱乐部简介①自考乐园俱乐部，专注于自考，致力于成为全国最全，最优的自考学习交流，资料共享平台.....

②本人自考计算机网络独立本科已过 8 科，真诚欢迎报考此科目的朋友进来一起交流，进步，提高.....欢迎加入自考乐园俱乐部，如有需要自考资料，请留言，我们会尽力帮助大家...祝大家自考快乐.....

③自考乐园诚与天下自考人共勉!!!
欢迎加入自考乐园俱乐部.....

☆☆☆与千万自考生同行，你准备好了吗？

你希望在自考的征途中，有一群和你志同道合的人同行吗？

你愿意在漫长的自考岁月中，有一群人和你分享快乐，分担忧愁吗？

你渴望在一个人奋斗时，有一群人在背后默默支持你吗？

你是否也一直在苦苦寻找这样一个平台，一群志同道合的人，一片积极向上的心，一个共同的追求，一个诚挚的鼓励，一个坚实的支持.....**对!!!就是这里!!!这里有你想要的一切.....**

与志者同行，你也将成为志者!!!

与成功者同行，你也将获得成功!!!

与千万自考生同行，你准备好了吗???

与千万自考生同行，你做好了准备吗???

今天我们诚挚的发出邀请，真诚的欢迎广大自考的朋友（尤其是和我报考相同专业的朋友）加入本俱乐部，一起交流，进步，提高.....**我们正寻找特别的你亲❤️情加入.....**

最后预祝所有的朋友:

自考❤️快乐

天❤️天有份好❤️心❤️情!!! -----杨尚杰于 2010.4.19