

- n 行列式共有 n^2 个元素，展开后有 $n!$ 项，可分解为 2^n 行列式；
- 代数余子式的性质：
 - A_{ij} 和 a_{ij} 的大小无关；
 - 某行（列）的元素乘以 其它行（列）元素的代数余子式为 0；
 - 某行（列）的元素乘以该行（列）元素的代数余子式为 $|A|$ ；
- 代数余子式和余子式的关系： $M_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$ $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
- 设 n 行列式 D ：
 - 将 D 上、下翻转或左右翻转，所得行列式为 D_1 ，则 $D_1 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$ ；
 - 将 D 顺时针或逆时针旋转 90° ，所得行列式为 D_2 ，则 $D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$ ；
 - 将 D 主对角线翻转后（转置），所得行列式为 D_3 ，则 $D_3 = D$ ；
 - 将 D 主副角线翻转后，所得行列式为 D_4 ，则 $D_4 = D$ ；
- 行列式的重要公式：
 - 主对角行列式：主对角元素的乘积；
 - 副对角行列式：副对角元素的乘积 $\times (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ；
 - 上、下三角行列式（ $\begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$ ）：主对角元素的乘积；
 - $\begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$ 和 $\begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$ ：副对角元素的乘积 $\times (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ；
 - 拉普拉斯展开式
 - $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A| |B|$ 、 $\begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^m |A| |B|$
 - 范德蒙行列式：大指标减小指标的连乘积；
 - 特征值；
- 对于 n 阶行列式 A ，恒有： $|\lambda E - A| = \lambda^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k s_k \lambda^{n-k}$ ，其中 s_k 为 k 阶主子式；
- 证明 $|A| = 0$ 的方法：
 - $|A| = -|A|$ ；

- 、反证法；
- 、构造齐次方程组 $Ax=0$ ，证明其有非零解；
- 、利用秩，证明 $r(A) < n$ ；
- 、证明 0 是其特征值；

2、矩阵

1. A 是 n 阶可逆矩阵：

- $\Leftrightarrow A \neq 0$ （是非奇异矩阵）；
- $\Leftrightarrow r(A) = n$ （是满秩矩阵）
- $\Leftrightarrow A$ 的行（列）向量组线性无关；
- $\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解；
- $\Leftrightarrow \forall b \in R^n, Ax=b$ 总有唯一解；
- $\Leftrightarrow A$ 与 E 等价；
- $\Leftrightarrow A$ 可表示成若干个初等矩阵的乘积；
- $\Leftrightarrow A$ 的特征值全不为 0；
- $\Leftrightarrow A^T A$ 是正定矩阵；
- $\Leftrightarrow A$ 的行（列）向量组是 R^n 的一组基；
- $\Leftrightarrow A$ 是 R^n 中某两组基的过渡矩阵；

2. 对于 n 阶矩阵 A ： $AA^* = A^*A = |A|E$ 无条件恒成立；

$$3. \begin{array}{lll} (A^{-1})^* = (A^*)^{-1} & (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} & (A^*)^T = (A^T)^* \\ (AB)^T = B^T A^T & (AB)^* = B^* A^* & (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \end{array}$$

4. 矩阵是表格，推导符号为波浪号或箭头；行列式是数值，可求代数余子式；

5. 关于分块矩阵的重要结论，其中均 A 、 B 可逆：

$$\text{若 } A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_s \end{pmatrix}, \text{ 则:}$$

$$、 |A| = |A_1| |A_2| \cdots |A_s| ;$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}; \quad (\text{主对角分块})$$

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}; \quad (\text{副对角分块})$$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}; \quad (\text{拉普拉斯})$$

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}; \quad (\text{拉普拉斯})$$

3、矩阵的初等变换与线性方程组

1. 一个 $m \times n$ 矩阵 A ，总可经过初等变换化为标准形，其标准形是唯一确定的： $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$ ；

等价类：所有与 A 等价的矩阵组成的一个集合，称为一个等价类；标准形为其形状最简单的矩阵；

对于同型矩阵 A 、 B ，若 $r(A) = r(B) \Leftrightarrow A \sim B$ ；

2. 行最简形矩阵：

、只能通过初等行变换获得；

、每行首个非 0 元素必须为 1；

、每行首个非 0 元素所在列的其他元素必须为 0；

3. 初等行变换的应用：（初等列变换类似，或转置后采用初等行变换）

、若 $(A, E) \xrightarrow{r} (E, X)$ ，则 A 可逆，且 $X = A^{-1}$ ；

、对矩阵 (A, B) 做初等行变化，当 A 变为 E 时， B 就变成 $A^{-1}B$ ，即：

$$(A, B) \xrightarrow{c} (E, A^{-1}B);$$

、求解线性方程组：对于 n 个未知数 n 个方程 $Ax = b$ ，如果

$$(A, b) \xrightarrow{r} (E, x), \text{ 则 } A \text{ 可逆, 且 } x = A^{-1}b;$$

4. 初等矩阵和对角矩阵的概念：

、初等矩阵是行变换还是列变换，由其位置决定：左乘为初等行矩阵、右乘为初等列矩阵；

、 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ，左乘矩阵 A ， λ_i 乘 A 的各行元素；右乘， λ_i 乘

A 的各列元素；

、对调两行或两列，符号 $E(i, j)$ ，且 $E(i, j)^{-1} = E(i, j)$ ，例如：

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} ;$$

、倍乘某行或某列，符号 $E(i(k))$ ，且 $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$ ，例如：

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & k & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{k} & \\ & & 1 \end{pmatrix} (k \neq 0) ;$$

、倍加某行或某列，符号 $E(ij(k))$ ，且 $E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k))$ ，如：

$$\begin{pmatrix} 1 & & k \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & -k \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} (k \neq 0) ;$$

5. 矩阵秩的基本性质：

、 $0 \leq r(A_{m \times n}) \leq \min(m, n)$ ；

、 $r(A^T) = r(A)$ ；

、若 $A \sim B$ ，则 $r(A) = r(B)$ ；

、若 P 、 Q 可逆，则 $r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$ ；（可逆矩阵不影响矩阵的秩）

、 $\max(r(A), r(B)) \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$ ；（ ）

、 $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$ ；（ ）

、 $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$ ；（ ）

、如果 A 是 $m \times n$ 矩阵， B 是 $n \times s$ 矩阵，且 $AB = 0$ ，则：（ ）

、 B 的列向量全部是齐次方程组 $AX = 0$ 解（转置运算后的结

论)；

$$r(A) + r(B) \leq n$$

、若 A 、 B 均为 n 阶方阵，则 $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$ ；

6. 三种特殊矩阵的方幂：

、秩为 1 的矩阵：一定可以分解为 列矩阵（向量） $\times$ 行矩阵（向量）的形式，再采用结合律；

、型如 $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的矩阵：利用二项展开式；

$$\text{二项展开式：} (a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^m a^{n-m} b^m + \cdots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m ;$$

注：、 $(a+b)^n$ 展开后有 $n+1$ 项；

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$\text{、组合的性质：} \quad C_n^m = C_n^{n-m} \quad C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1} \quad \sum_{r=0}^n C_n^r = 2^n \quad rC_n^r = nC_{n-1}^{r-1} ;$$

、利用特征值和相似对角化：

7. 伴随矩阵：

$$\text{、伴随矩阵的秩：} \quad r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) = n \\ 1 & r(A) = n-1 \\ 0 & r(A) < n-1 \end{cases} ;$$

$$\text{、伴随矩阵的特征值：} \quad \frac{|A|}{\lambda} \quad (AX = \lambda X, A^* = |A| A^{-1} \Rightarrow A^* X = \frac{|A|}{\lambda} X) ;$$

$$\text{、} \quad A^* = |A| A^{-1} \quad A^*| = |A|^{n-1}$$

8. 关于 A 矩阵秩的描述：

、 $r(A) = n$ ， A 中有 n 阶子式不为 0， $n+1$ 阶子式全部为 0；（两句话）

、 $r(A) < n$ ， A 中有 n 阶子式全部为 0；

、 $r(A) \geq n$ ， A 中有 n 阶子式不为 0；

9. 线性方程组： $Ax=b$ ，其中 A 为 $m \times n$ 矩阵，则：

、 m 与方程的个数相同，即方程组 $Ax=b$ 有 m 个方程；

、 n 与方程组得未知数个数相同，方程组 $Ax=b$ 为 n 元方程；

10. 线性方程组 $Ax=b$ 的求解：

- 、对增广矩阵 B 进行初等行变换（只能使用初等行变换）；
- 、齐次解为对应齐次方程组的解；
- 、特解：自由变量赋初值后求得；

11. 由 n 个未知数 m 个方程的方程组构成 n 元线性方程：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases};$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow Ax=b \quad (\text{向量方程, } A \text{ 为 } m \times n \text{ 矩阵, } m \text{ 个}$$

方程, n 个未知数)

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \beta \quad (\text{全部按列分块, 其中 } \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix});$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \beta \quad (\text{线性表出})$$

$$\text{有解的充要条件: } r(A) = r(A, \beta) \leq n \quad (n \text{ 为未知数的个数或维数})$$

4、向量组的线性相关性

1. m 个 n 维列向量所组成的向量组 A ： $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 构成 $n \times m$ 矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m);$$

$$m \text{ 个 } n \text{ 维行向量所组成的向量组 } B : \beta_1^T, \beta_2^T, \cdots, \beta_m^T \text{ 构成 } m \times n \text{ 矩阵 } B = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix};$$

含有有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应；

2. 、向量组的线性相关、无关 $\Leftrightarrow Ax=0$ 有、无非零解；（齐次线性方程组）

、向量的线性表出 $\Leftrightarrow Ax=b$ 是否有解；（线性方程组）

、向量组的相互线性表示 $\Leftrightarrow AX=B$ 是否有解；（矩阵方程）

3. 矩阵 $A_{m \times n}$ 与 $B_{l \times n}$ 行向量组等价的充分必要条件是：齐次方程组

$$Ax=0 \text{ 和 } Bx=0 \text{ 同解； (P}_{101} \text{ 例 14)}$$

4. $r(A^T A) = r(A)$; (P₁₀₁ 例 15)

5. n 维向量线性相关的几何意义 :

、 α 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha = 0$;

、 α, β 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha, \beta$ 坐标成比例或共线 (平行) ;

、 α, β, γ 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma$ 共面 ;

6. 线性相关与无关的两套定理 :

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 , 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 必线性相关 ;

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关 , 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s+1}$ 必线性无关 ; (向量的个数加加减减 , 二者为对偶)

若 r 维向量组 A 的每个向量上添上 $n-r$ 个分量 , 构成 n 维向量组 B :

若 A 线性无关 , 则 B 也线性无关 ; 反之若 B 线性相关 , 则 A 也线性相关 ; (向量组的维数加加减减)

简言之 : 无关组延长后仍无关 , 反之 , 不确定 ;

7. 向量组 A (个数为 r) 能由向量组 B (个数为 s) 线性表示 , 且 A 线性无关 , 则 $r \leq s$ (二版 P₇₄ 定理 7) ;

向量组 A 能由向量组 B 线性表示 , 则 $r(A) \leq r(B)$; (P₈₆ 定理 3)

向量组 A 能由向量组 B 线性表示

$\Leftrightarrow AX = B$ 有解 ;

$\Leftrightarrow r(A) = r(A, B)$ (P₈₅ 定理 2)

向量组 A 能由向量组 B 等价 $\Leftrightarrow r(A) = r(B) = r(A, B)$ (P₈₅ 定理 2 推论)

8. 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在有限个初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_l$, 使 $A = P_1 P_2 \dots P_l$;

、 矩阵行等价 : $A \sim^r B \Leftrightarrow PA = B$ (左乘 , P 可逆) $\Leftrightarrow Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解

、 矩阵列等价 : $A \sim^c B \Leftrightarrow AQ = B$ (右乘 , Q 可逆) ;

、 矩阵等价 : $A \sim B \Leftrightarrow PAQ = B$ (P 、 Q 可逆) ;

9. 对于矩阵 $A_{m \times n}$ 与 $B_{l \times k}$:

、 若 A 与 B 行等价 , 则 A 与 B 的行秩相等 ;

、 若 A 与 B 行等价 , 则 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解 , 且 A 与 B 的任何对应的列向量组具有相同的线性相关性 ;

、 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩 ;

、矩阵 A 的行秩等于列秩；

10. 若 $A_{m \times s} B_{s \times n} = C_{m \times n}$ ，则：

、 C 的列向量组能由 A 的列向量组线性表示， B 为系数矩阵；

、 C 的行向量组能由 B 的行向量组线性表示， A^T 为系数矩阵；

(转置)

11. 齐次方程组 $Bx=0$ 的解一定是 $ABx=0$ 的解，考试中可以直接作为定理使用，而无需证明；

、 $ABx=0$ 只有零解 $\Rightarrow Bx=0$ 只有零解；

、 $Bx=0$ 有非零解 $\Rightarrow ABx=0$ 一定存在非零解；

12. 设向量组 $B_{n \times r}: b_1, b_2, \dots, b_r$ 可由向量组 $A_{n \times s}: a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性表示为：(P_{110} 题 19 结论)

$$(b_1, b_2, \dots, b_r) = (a_1, a_2, \dots, a_s)K \quad (B = AK)$$

其中 K 为 $s \times r$ ，且 A 线性无关，则 B 组线性无关 $\Leftrightarrow r(K) = r$ ；(B 与 K 的列向量组具有相同线性相关性)

(必要性： $\because r = r(B) = r(AK) \leq r(K), r(K) \leq s, \therefore r(K) = r$ ；充分性：反证法)

注：当 $r = s$ 时， K 为方阵，可当作定理使用；

13. 、对矩阵 $A_{m \times n}$ ，存在 $Q_{n \times m}$ ， $AQ = E_m \Leftrightarrow r(A) = m$ 、 Q 的列向量线性无关；(P_{87})

、对矩阵 $A_{m \times n}$ ，存在 $P_{n \times m}$ ， $PA = E_n \Leftrightarrow r(A) = n$ 、 P 的行向量线性无关；

14. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 存在一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$ ，使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$ 成立；(定义)

$$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = 0 \text{ 有非零解，即 } Ax=0 \text{ 有非零解；}$$

$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$ ，系数矩阵的秩小于未知数的个数；

15. 设 $m \times n$ 的矩阵 A 的秩为 r ，则 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集 S 的秩为： $r(S) = n - r$ ；

16. 若 η^* 为 $Ax=b$ 的一个解， $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 为 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $\eta^*, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关；(P_{111} 题 33 结论)

5、相似矩阵和二次型

1. 正交矩阵 $\Leftrightarrow A^T A = E$ 或 $A^{-1} = A^T$ (定义), 性质:

、 A 的列向量都是单位向量, 且两两正交, 即

$$a_i^T a_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} (i, j = 1, 2, \dots, n);$$

、若 A 为正交矩阵, 则 $A^{-1} = A^T$ 也为正交阵, 且 $|A| = \pm 1$;

、若 A 、 B 正交阵, 则 AB 也是正交阵;

注意: 求解正交阵, 千万不要忘记 施密特正交化 和单位化;

2. 施密特正交化: $(a_1, a_2, \dots, a_r)$

$$b_1 = a_1;$$

$$b_2 = a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1$$

.....

$$b_r = a_r - \frac{[b_1, a_r]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_r]}{[b_2, b_2]} b_2 - \dots - \frac{[b_{r-1}, a_r]}{[b_{r-1}, b_{r-1}]} b_{r-1};$$

3. 对于普通方阵, 不同特征值对应的特征向量线性无关;

对于实对称阵, 不同特征值对应的特征向量正交;

4. 、 A 与 B 等价 $\Leftrightarrow A$ 经过初等变换得到 B ;

$$\Leftrightarrow PAQ = B, P、Q \text{ 可逆};$$

$$\Leftrightarrow r(A) = r(B), A、B \text{ 同型};$$

、 A 与 B 合同 $\Leftrightarrow C^T A C = B$, 其中 C 可逆;

$$\Leftrightarrow x^T A x \text{ 与 } x^T B x \text{ 有相同的正、负惯性指数};$$

、 A 与 B 相似 $\Leftrightarrow P^{-1} A P = B$;

5. 相似一定合同、合同未必相似;

若 C 为正交矩阵, 则 $C^T A C = B \Rightarrow A \sim B$, (合同、相似的约束条件不同, 相似的更严格);

6. A 为对称阵, 则 A 为二次型矩阵;

7. n 元二次型 $x^T A x$ 为正定:

$$\Leftrightarrow A \text{ 的正惯性指数为 } n;$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 与 } E \text{ 合同, 即存在可逆矩阵 } C, \text{ 使 } C^T A C = E;$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 的所有特征值均为正数};$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 的各阶顺序主子式均大于 } 0;$$

$$\Rightarrow a_{ii} > 0, |A| > 0; (\text{必要条件})$$